



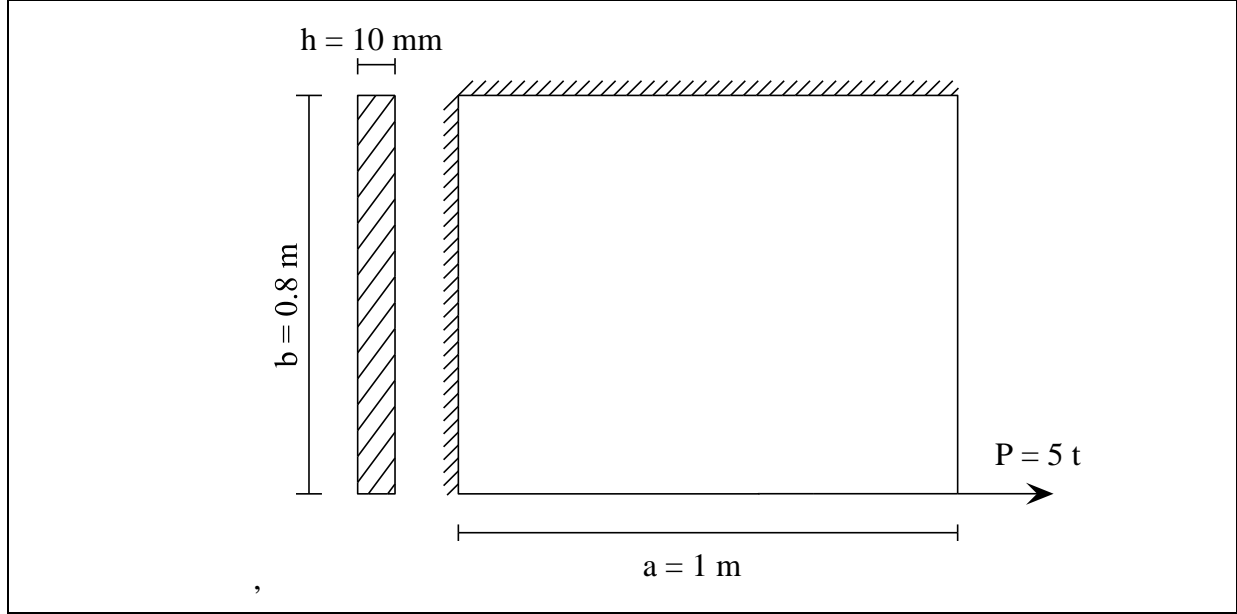
**İstanbul Üniversitesi**  
**Mühendislik Fakültesi**  
İnşaat Mühendisliği Bölümü

**İSOPARAMETRİK PLAK ELEMANLARININ ANALİZİ**

<b>Hazırlayan:</b>	
Rasim TEMUR	2601030107

**KONU:** Sonlu elemanlar yöntemi ile plak elemanının analizi

**AMAÇ:** Şekil 1'deki gibi 5 tonluk yük etkileyen plak elemanının 2 tarafı tutuludur. Sistemin elastik modülü  $E=2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$  ve puasson oranı  $\nu = 0,3$  olarak verilmektedir. Plâğı isoparametrik eleman olarak modelleyiniz, deformasyonları ve gerilmeleri hesaplayınız.



**Şekil 1** – İki tarafı ankastre ile tutulmuş plak elemanı

### ÇÖZÜM YÖNTEMİ:

İsoparametrik koordinat transformasyon kullanılarak;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{4} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{4} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \frac{(1+\eta)(1-\xi)}{4} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Buradan global x koordinatının doğal koordinat olan  $\xi$  'a göre transformasyon denklemi ;

$$x = \frac{a}{2}(1 + \xi)$$

Global y koordinatının doğal koordinat olan  $\eta$  'a transformasyonu ise

$$y = \frac{b}{2}(1 + \eta)$$

elde edilir. Jakobian matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \text{ ve } |\mathbf{J}| = \det \mathbf{J} = \frac{ab}{4} \text{ diagonal } \mathbf{J} \text{ matrisinin evriği } \mathbf{J}^{-1} \text{ ise aşağıdaki}$$

gibi hesaplanabilir.

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} N_2 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} N_3 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} N_4 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_2 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_3 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} N_4 \\ \frac{\partial}{\partial y} N_1 & \frac{\partial}{\partial x} N_1 & \frac{\partial}{\partial y} N_2 & \frac{\partial}{\partial x} N_2 & \frac{\partial}{\partial y} N_3 & \frac{\partial}{\partial x} N_3 & \frac{\partial}{\partial y} N_4 & \frac{\partial}{\partial x} N_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda  $i=1,2,3,4$  için  $\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{2}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$  ve  $\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{2}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$  olmaktadır.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Eşitliklerini kullanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1+\eta)}{a} & 0 & \frac{-(1+\eta)}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-(1-\xi)}{b} & 0 & \frac{-(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1-\xi)}{b} \\ \frac{-(1-\xi)}{b} & \frac{-(1-\eta)}{a} & \frac{-(1+\xi)}{b} & \frac{(1-\eta)}{a} & \frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1+\eta)}{a} & \frac{(1-\xi)}{b} & \frac{-(1+\eta)}{a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Eleman rijitlik matrisi ise  $\underline{K} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} |J| d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{G}(\eta, \xi) d\xi d\eta$  eşitliği ile hesaplanabilir.

Bu eşitlikte Gauss nümerik integrasyonu ile elde edilen değerleri yerine koyarak;

$$\underline{K} = w_1 w_1 \underline{G}(\xi_1, \eta_1) + w_1 w_2 \underline{G}(\xi_1, \eta_2) + w_2 w_1 \underline{G}(\xi_2, \eta_1) + w_2 w_2 \underline{G}(\xi_2, \eta_2)$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitlikte  $w_1 = w_2 = 1$ ;  $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  olmaktadır.

Aşağıda kaynak kodları verilen program yukarıdaki denklem ve matrisleri kullanarak önce elemanların rijitlik matrislerini hesaplar ve sistem rijitlik matrisini oluşturur. Oluşturduğu sistem rijitlik matrisinin tersini alarak yük vektörü ile çarpar ve deplasmanları hesaplar.

### Programın Fortran77 Kaynak Kodları:

```

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION BM(3,8),BT(8,3),D(3,3),SON(8,8),CARP(8,3),BON(8,8)
      *,N(140),SR(141,41),SRM(140,140),YUK(140),DP(140)
      OPEN(2,FILE='PLAK.DAT',STATUS='OLD')
      OPEN(3,FILE='PLAK.OUT',FORM='FORMATTED')
      READ(2,*)NP,ND
      READ(2,*)E,V,A,B,H
      DO 20 PSAY=-1/SQRT(3),1/SQRT(3),2/SQRT(3)
      DO 20 ETA=-1/SQRT(3),1/SQRT(3),2/SQRT(3)
      BM(1,1)=- (1.-ETA) / (2.*A)
      BM(1,3)=-BM(1,1)
      BM(1,5)=(1.+ETA) / (2.*A)
      BM(1,7)=- (1.+ETA) / (2.*A)
      BM(2,2)=- (1.-PSAY) / (2.*B)
      BM(2,4)=- (1.+PSAY) / (2.*B)
      BM(2,6)=-BM(2,4)
      BM(2,8)=-BM(2,2)
      BM(3,1)=BM(2,2)
      BM(3,2)=BM(1,1)
      BM(3,3)=BM(2,4)
      BM(3,4)=BM(1,3)
      BM(3,5)=BM(2,6)
      BM(3,6)=BM(1,5)
      BM(3,7)=BM(2,8)
      BM(3,8)=BM(1,7)
      RJ=(A*B) / 4.
      DO 10 I=1,8
      DO 10 J=1,3
10  BT(I,J)=BM(J,I)
      RK=E / (1-V*V)
      RJ=(A*B) / 4.
      D(1,1)=1*E / (1-V*V)
      D(1,2)=V*E / (1-V*V)
      D(2,1)=V*E / (1-V*V)
      D(2,2)=1*E / (1-V*V)
      D(3,3)=E* (1-V) / (2.* (1-V*V))
      CALL MATCARP(3,3,D,8,3,BT,CARP)
      CALL MATCARP(3,8,BM,8,3,CARP,BON)
      DO 20 I=1,8
      DO 20 J=1,8
20  SON(I,J)=SON(I,J)+RJ*H*BON(I,J)
      CALL BIALT(E,V,A,B,ND,NP,SON,N,SR,SRM,YUK,DP)
      CLOSE(3)
      CLOSE(2)
      STOP
      END

```

```

SUBROUTINE BIALT (E, V, A, B, ND, NP, SON, N, SR, SRM, YUK, DP)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION SON (8, 8), N (ND), SR (ND+1, ND+1), SRM (ND, ND)
*, YUK (ND), DP (ND)
C =====
C ===== SISTEM RIJITLIK MATRISININ OLUSTURULMASI =====
C =====
DO 50 INP=1, NP
READ (2, *) (N (I), I=1, 8)
DO 40 I=1, 8
40 N (I)=N (I)+1
DO 50 I=1, 8
DO 50 J=1, 8
45 FORMAT (I2, '-)', 10 (1PE10.2))
50 SR (N (I), N (J))=SR (N (I), N (J))+SON (I, J)
DO 60 I=1, ND
DO 60 J=1, ND
60 SRM (I, J)=SR (I+1, J+1)
80 FORMAT (I2, '-)', 10 (1PE10.2))
WRITE (3, *) 'SISTEM RIJITLIK MATRISI'
DO 90 I=1, ND
90 WRITE (3, 80) I, (SRM (I, L), L=1, ND)
C =====
C ===== SISTEM RIJITLIK MATRISININ TERSININ HESABI =====
C =====
DO 110 I=1, ND
DO 120 J=1, ND
DO 120 K=1, ND
IF (J.EQ.I.OR.K.EQ.I) GO TO 120
SRM (J, K)=SRM (J, K)-SRM (J, I)*SRM (I, K)/SRM (I, I)
120 CONTINUE
SRM (I, I)=-1.0/SRM (I, I)
DO 130 J=1, ND
IF (J.EQ.I) GO TO 130
SRM (J, I)=SRM (J, I)*SRM (I, I)
130 CONTINUE
DO 140 K=1, ND
IF (K.EQ.I) GO TO 140
SRM (I, K)=SRM (I, K)*SRM (I, I)
140 CONTINUE
110 CONTINUE
DO 150 I=1, ND
DO 150 J=1, ND
150 SRM (I, J)=-SRM (I, J)
WRITE (3, *) 'SISTEM RIJITLIK MATRISININ TERSI'
DO 190 I=1, ND
190 WRITE (3, 80) I, (SRM (I, L), L=1, ND)
C =====
C ===== SISTEME ETKIYEN YUKLERIN KUTUKTEN OKUNMASI =====
C =====
READ (2, *) (YUK (I), I=1, ND)
WRITE (3, *) 'SISTEME ETKIYEN YUKLER'
DO 200 I=1, ND
200 WRITE (3, 85) I, YUK (I)
85 FORMAT (I2, '-)', 1PE10.2)
C =====
C ===== DEFORMASYONLARIN HESABI =====
C =====
CALL MATCARP (ND, 1, YUK, ND, ND, SRM, DP)
WRITE (3, *) 'DEFORMASYONLAR'
DO 210 I=1, ND
210 WRITE (3, 85) I, DP (I)
C =====
C ===== GERILME HESABI =====
C =====
WRITE (3, *) 'GERILMELELER'
DO 220 I=1, ND-1, 2
PS=E/(1-V*V)

```

```

        SIGMAX=PS*(DP(I)/A-V*DP(I+1)/B)
        SIGMAY=PS*(V*DP(I)/A-DP(I+1)/B)
        WRITE(3,85)I,SIGMAX
220  WRITE(3,85)I+1,SIGMAY
        RETURN
        END
C =====
C ===== İKİ MATRİSİN CARPIMINI YAPAN ALT PROGRAM =====
C =====
        SUBROUTINE MATCARP(ID,JD,D,IB,JB,BT,CARP)
        IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
        DIMENSION BT(IB,JB),D(ID,JD),CARP(IB,JD)
        DO 100 I=1,IB
        DO 100 J=1,JD
        CARP(I,J)=0.
        DO 100 K=1,JB
100  CARP(I,J)=CARP(I,J)+BT(I,K)*D(K,J)
        RETURN
        END

```

Mevcut çalışmada plak elemanı aşağıdaki gibi 3 farklı çözüm yapılmıştır. Çözümlerin farkı elemanın bölünmesi ve sonuçlardaki hassaslıktır.

### Çözüm 1:

İki kenarından ankstre olan ve tekil yüke maruz kalan plak elemanı Şekil 2’de görüldüğü gibi tek parça halinde modellenerek analiz edilmiştir.

Eğer bu sistemi milyonlarca parçaya ayırarak analiz etmiş olsaydık çok daha hassas sonuçlar elde eder, sistemin hemen her noktasındaki deformasyonları elde edebilirdik.

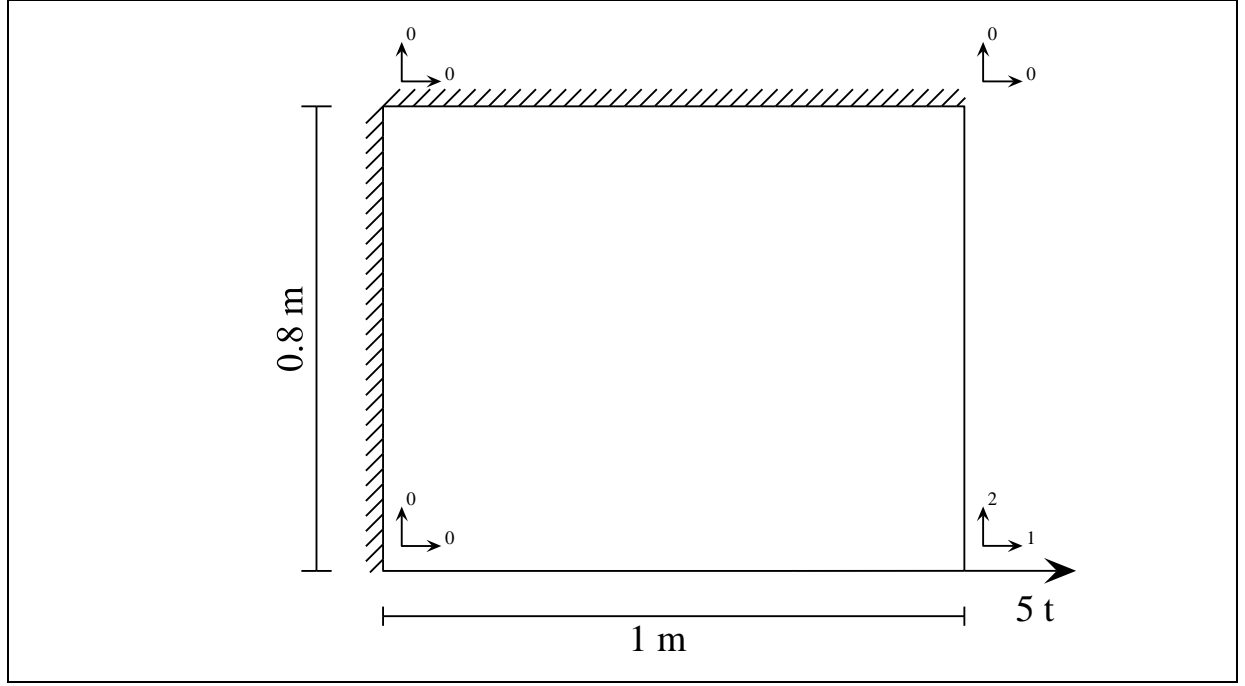
### Tek Parça Modelleme İçin Plak.dat Dosyasının İçeriği:

```

1 2
2000000.0 0.2 0.1 0.1 0.05
0 0 1 2 0 0 0 0
5 0

```

- Bu dosyadaki ilk satırda plak elemanının bölündüğü parça sayısı ve toplam deformasyon sayısı bulunmaktadır.
- İkinci satırda sırasıyla sistemin elastik modülü, poisson oranı, genişliği, yüksekliği ve derinliği verilmiştir.
- 3. satırda Şekil 2’deki matematiksel modele uygun olarak elemanın serbestlikleri yazılmıştır.
- Son satır ise serbestliklere etkiyen yükler, yani yük vektörüdür.



Şekil 2 – Sistemin analizi için hazırlanan matematiksel model

### Tek Parça Modelleme İçin Plak.out Dosyasının İçeriği:

SISTEM RIJITLIK MATRİSİ

1-) 4.86E+04 -1.56E+04  
2-) -1.56E+04 4.86E+04

SISTEM RIJITLIK MATRİSİNİN TERSİ

1-) 2.29E-05 7.37E-06  
2-) 7.37E-06 2.29E-05

SISTEME ETKİYEN YUKLER

1-) 5.00E+00  
2-) 0.00E+00

DEFORMASYONLAR

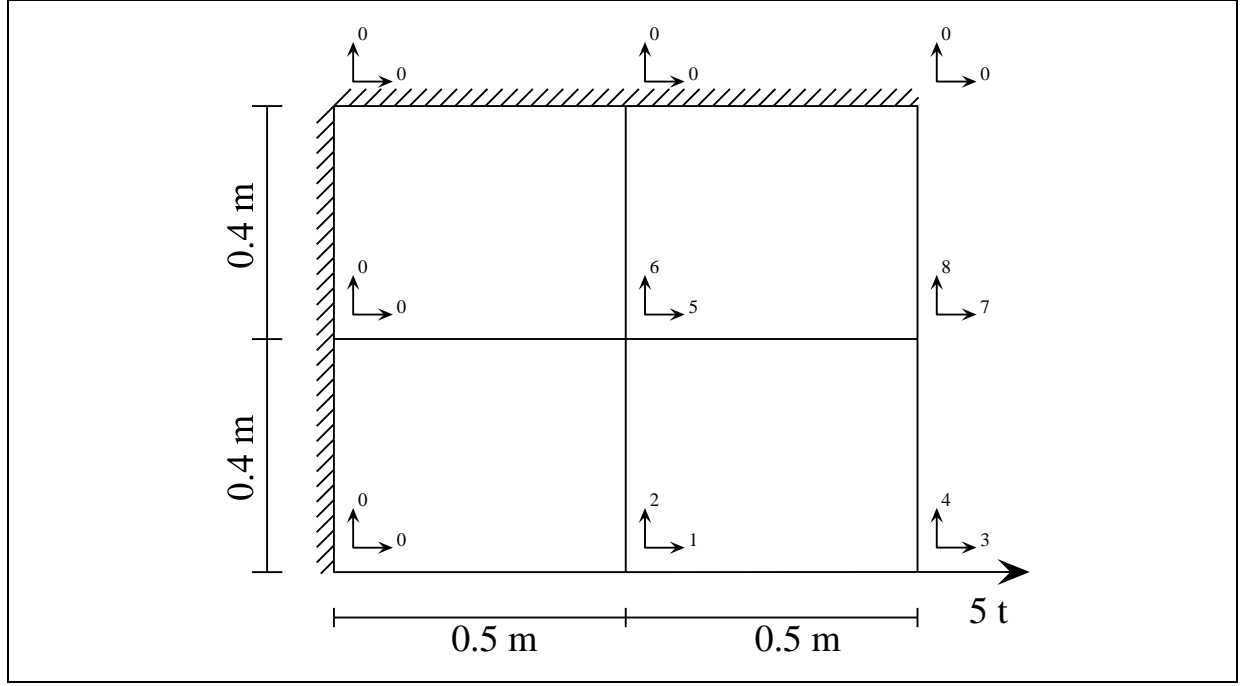
1-) 1.15E-04  
2-) 3.69E-05

GERİLMELER

1-) 2.24E+03  
2-) -2.90E+02

### Çözüm 2:

Tek parça halinde çözümü yapılan eleman, daha hassas sonuçlar almak için 4 parçaya bölünmüştür(Şekil 3). Rijitlik matrislerinin birbirine eşit olması için parçaların boyutları birbirine eşittir.



Şekil 3 - Sistemin analizi için hazırlanan matematiksel model

#### 4 Parça Modelleme İçin Plak.dat Dosyasının İçeriği:

```

4 8
20000000 0.3 0.5 0.4 0.01
0 0 1 2 5 6 0 0
1 2 3 4 7 8 5 6
0 0 5 6 0 0 0 0
5 6 7 8 0 0 0 0
0 0 5 0 0 0 0 0

```

#### 4 Parça Modelleme İçin Plak.out Dosyasının İçeriği:

##### SISTEM RIJITLIK MATRİSİ

```

1-) 1.81E+05 0.00E+00 -4.26E+04 -2.75E+03 -5.49E+03 0.00E+00 -4.53E+04 -3.57E+04
2-) 0.00E+00 2.24E+05 2.75E+03 2.53E+04 4.55E-13 -1.63E+05 -3.57E+04 -5.60E+04
3-) -4.26E+04 2.75E+03 9.07E+04 -3.57E+04 -4.53E+04 3.57E+04 -2.75E+03 -2.75E+03
4-) -2.75E+03 2.53E+04 -3.57E+04 1.12E+05 3.57E+04 -5.60E+04 2.75E+03 -8.13E+04
5-) -5.49E+03 -4.55E-13 -4.53E+04 3.57E+04 3.63E+05 0.00E+00 -8.52E+04 -4.55E-13
6-) 0.00E+00 -1.63E+05 3.57E+04 -5.60E+04 0.00E+00 4.48E+05 0.00E+00 5.05E+04
7-) -4.53E+04 -3.57E+04 -2.75E+03 2.75E+03 -8.52E+04 0.00E+00 1.81E+05 0.00E+00
8-) -3.57E+04 -5.60E+04 -2.75E+03 -8.13E+04 -4.55E-13 5.05E+04 0.00E+00 2.24E+05

```

##### SISTEM RIJITLIK MATRİSİNİN TERSİ

```

1-) 8.31E-06 5.70E-07 6.13E-06 3.59E-06 1.19E-06 -1.57E-07 2.79E-06 2.88E-06
2-) 5.70E-07 6.75E-06 -4.86E-07 4.01E-07 2.82E-07 2.38E-06 1.59E-06 1.38E-06
3-) 6.13E-06 -4.86E-07 1.89E-05 7.97E-06 2.30E-06 -1.16E-06 2.68E-06 4.24E-06
4-) 3.59E-06 4.01E-07 7.97E-06 1.69E-05 -4.66E-07 8.66E-07 6.23E-07 6.70E-06
5-) 1.19E-06 2.82E-07 2.30E-06 -4.66E-07 3.60E-06 -1.56E-07 2.09E-06 1.55E-07
6-) -1.57E-07 2.38E-06 -1.16E-06 8.66E-07 -1.56E-07 3.28E-06 3.25E-07 1.30E-07
7-) 2.79E-06 1.59E-06 2.68E-06 6.23E-07 2.09E-06 3.25E-07 7.54E-06 1.03E-06
8-) 2.88E-06 1.38E-06 4.24E-06 6.70E-06 1.55E-07 1.30E-07 1.03E-06 7.72E-06

```

##### SISTEME ETKİYEN YUKLER

```

1-) 0.00E+00
2-) 0.00E+00
3-) 5.00E+00
4-) 0.00E+00
5-) 0.00E+00

```

6-) 0.00E+00  
7-) 0.00E+00  
8-) 0.00E+00

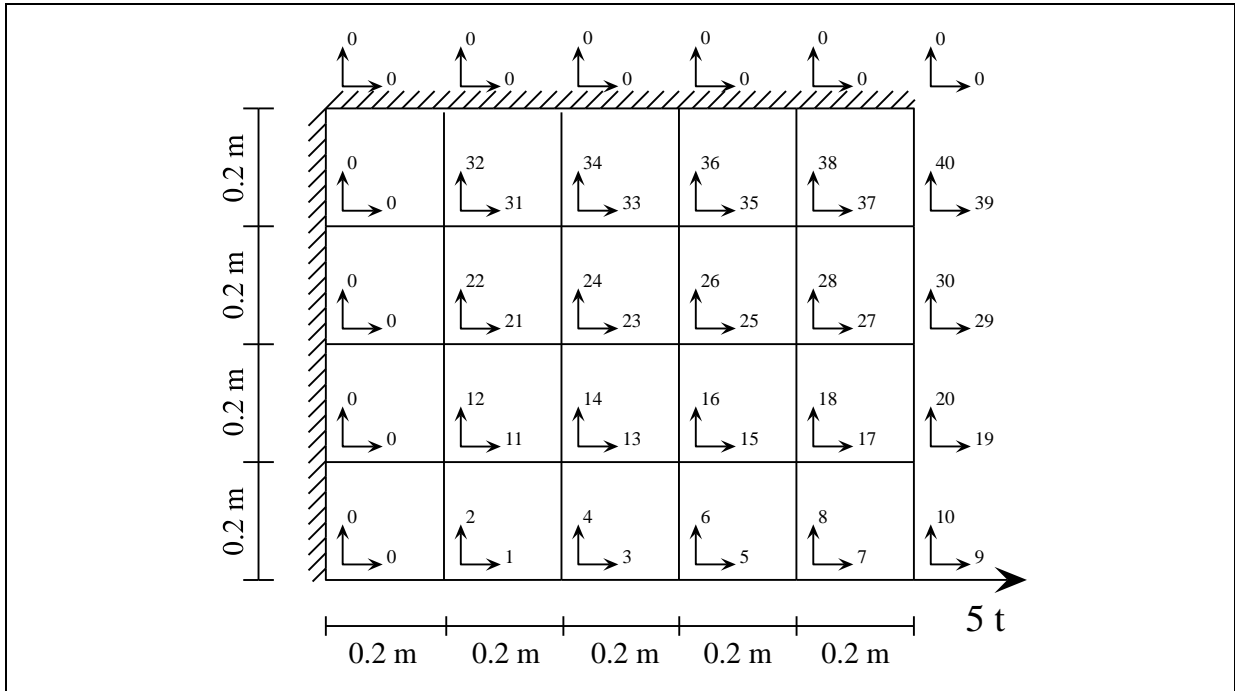
DEFORMASYONLAR

1-) 3.07E-05  
2-) -2.43E-06  
3-) 9.44E-05  
4-) 3.99E-05  
5-) 1.15E-05  
6-) -5.81E-06  
7-) 1.34E-05  
8-) 2.12E-05

GERILMELER

1-) 1.37E+03  
2-) 4.03E+02  
3-) 3.71E+03  
4-) -1.36E+03  
5-) 5.69E+02  
6-) 4.20E+02  
7-) 3.56E+02  
8-) -1.05E+03

**Çözüm 3 :**



**Şekil 4 - Sistemin analizi için hazırlanan matematiksel model**

**20 Parça Modelleme İçin Plak.dat Dosyasının İçeriği:**

```
20 40
2000000.0 0.2 0.1 0.1 0.05
0 0 1 2 11 12 0 0
1 2 3 4 13 14 11 12
3 4 5 6 15 16 13 14
5 6 7 8 17 18 15 16
7 8 9 10 19 20 17 18
0 0 11 12 21 22 0 0
11 12 13 14 23 24 21 22
13 14 15 16 25 26 23 24
15 16 17 18 27 28 25 26
```

